NIXDORF
COMPUTER

ZAHLENSYSTEME

LEHR-TEIL

EINE PROGRAMMIERTE UNTERWEISUNG
FÜR DEN SELBSTUNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN
VON DER
NIXDORF COMPUTER AG
AUS- UND WEITERBILDUNGSZENTRUM
TECHNISCHE AUSBILDUNG
4796 SALZKOTTEN
SCHÜTZENPLATZ

APRIL 1974

INHALT

INHALT

Vorwort

Im Zeitalter der Automation hat es sich als notwendig erwiesen, in gewissen Bereichen nicht mit dem dezimalen Zahlensystem sondern mit ganz anderen Zahlensystemen zu arbeiten.

Vornehmlich sind es Maschinen aus dem Bereich der elektronischen Datenverarbeitung, die mit diesen "anderen" Zahlensystemen operieren.

Dementsprechend müssen ebenso die Benutzer, die Bediener und die Techniker für diese Maschinen mit diesen Zahlen rechnen können.

Was dazu erforderlich ist, soll uns dieses Hand out vermitteln. Als Voraussetzung reichen unsere Kenntnisse über die vier Grundrechnungsarten völlig aus.

Und nun munter ans Werk, damit wir endlich wissen, daß es richtig sein kann, wenn es heißt: 1 + 1 = 10 oder 5 + 4 = 11 oder 9 + 8 = 11.

Den meisten von uns wird bekannt sein, daß innerhalb der vier Grundrechnungsarten den einzelnen Zahlen bestimmte Begriffe zugeordnet sind. Soweit sie uns nicht gegenwärtig sind, wollen wir uns an dieser Stelle die Begriffe einprägen, denn sie tauchen im folgenden Text des öfteren auf und tragen wesentlich zum Verstehen des angebotenen Lehrstoffs bei.

Hier die Begriffe mit entsprechenden Beispielen:

4	+	3	=	7
Summand		Summand		Summe
19	−	6	=	13
Minuend		Subtrahend		Differenz
8	·	5	=	40
Faktor		Faktor		Produkt
63	:	9	=	7
Dividend		Divisor		Quotient

1. Das uns allen geläufige Zahlensystem ist das Zehner oder Dezimalsystem (lat. decem = zehn). Die Ziffern dieses Systems sind wie wir wissen folgende:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Wir haben in aufsteigender Reihenfolge gezählt, indem wir mit der kleinsten Ziffer begonnen haben (= 0) und die größte Ziffer (= 9) als letzte aufgeführt wurde.

Mit diesen Ziffern lassen sich alle Zahlen des Dezimalsystems schreiben. Die "Zehn" (= 10) gehört nicht mehr in diese Folge, denn die größte Ziffer im Dezimalsystem ist "9". Die "10" setzt sich nämlich in der Schreibweise schon wieder aus den Ziffern "1" und "0" zusammen und ist somit keine Ziffer mehr, sondern eine Zahl.

In gewisser Weise ist die "10" in diesem Zahlensystem jedoch schon von Bedeutung:

Jedem von uns ist klar, daß die "10" diekkleinste aus zwei Ziffern zusammemgesetzte Zahl des Dezimalsystems ist. Aber noch etwas anderes ist sehr wichtig. Dieses Zahlensystem besteht nämlich aus zehn verschiedenen Ziffern. Man könnte auch sagen:

- Das Dezimalsystem beruht auf der Basis von zehn verschiedenen Ziffern.

Es gibt jedoch Zahlensysteme, die aus weniger als zehn verschiedenen Ziffern bestehen und somit eine andere Basis haben, auf die wir später noch genauer eingehen werden.

Wir merken uns vorerst einmal folgendes:

- Die Basis eines Zahlensystems gibt die Anzahl der in dem jeweiligen Zahlensystem zur Verfügung stehenden verschiedenen Ziffern an.

Zwischen der Basis und den Ziffern eines Zahlensystems bestehen noch weitere Zusammenhänge. Gehen wir wieder vom Dezimalsystem aus. Folgendes ist uns bekannt:

- Die Basis des Dezimalsystems ist "10".
  Die größte Ziffer des Dezimalsystems ist "9".

Dabei können wir feststellen, daß "9" um 1 kleiner ist als "10". Daraus läßt sich folgende Regel ableiten, die wir uns merken wollen:

- Die größte Ziffer eines Zahlensystems ist um 1 kleiner als die Basis.

Was wir bis hierher gelernt haben, können wir auch verkürzt angeben, wenn wir für die Basis den Buchstaben "B" setzen:

- Anzahl der Ziffern = B
  größte Ziffer = B-1 (B minus 1)

Diese Regel gilt natürlich auch für andere Zahlensysteme, deren Basis nicht "10" ist.

Z.B. sieht die Ziffernfolge eines Zahlensystems mit der Basis "8" wie folgt aus:

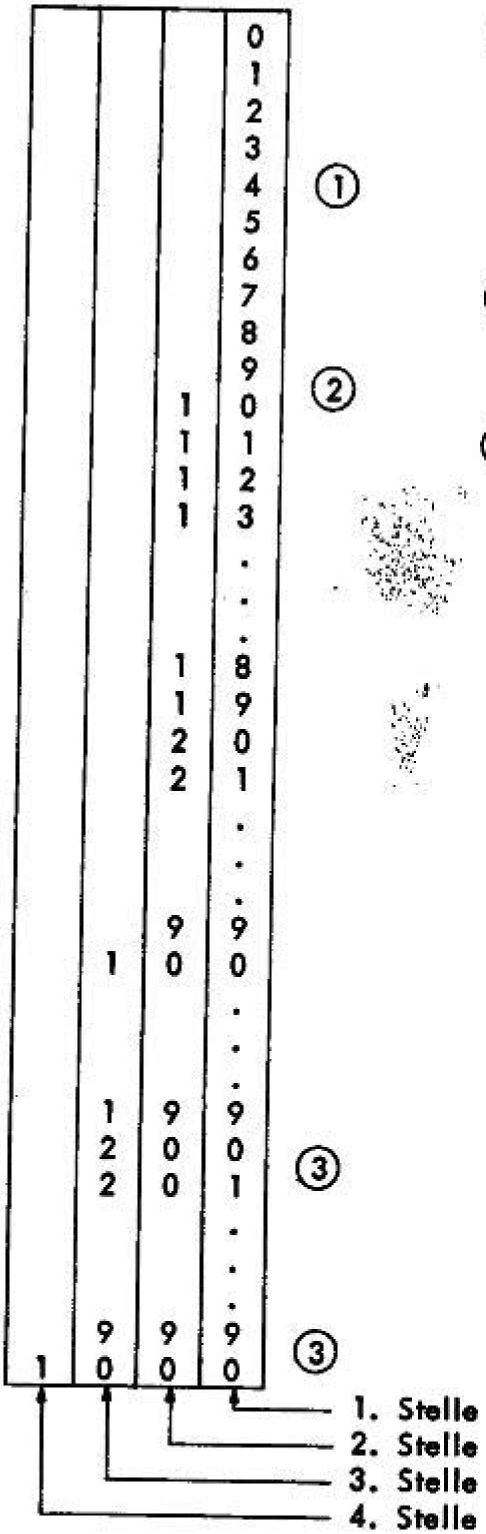
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Kontrollieren wir das Ganze:

- Anzahl der Ziffern = B = 8
  größte Ziffer = B-1 = 8-1 = 7

Aller Anfang ist schwer. - Darum wenden wir uns dem Arbeitsbogen Nr. 1 zu und lösen die dort gestellten Aufgaben.

1.1. Einige Merkmale von Zahlensystemen haben wir schon kennengelernt. Aus der folgenden Dezimalzahlenreihe wollen wir weitere Regeln erkennen und allgemein verbindlich ableiten für andere Zahlensysteme:



1 Deutlich ist zu erkennen, daß in der hintersten Stelle (1. Stelle) immer wieder alle Ziffern des Zahlensystems durchlaufen werden. Und auf die größte Ziffer (hier 9) folgt immer die kleinste (immer 0).

2 Beim ersten Übergang von "9" auf "0" in der 1. Stelle erscheint in der 2. Stelle eine "1".

3 Wenn in der 2. Stelle ebenfalls eine "9" steht, folgt auch hier die "0" als kleinste Ziffer. Und eine "1" kommt als 3. Stelle hinzu. Genauso wie die 2. Stelle verhalten sich auch die 3. Stelle und alle weiteren Stellen.

Ferner stellen wir fest, daß jede Stelle einer Dezimalzahl "zehnmal" mehr wert ist, als die Stelle rechts daneben. Z.B. ist die 3. Stelle zehnmal mehr wert als die 2. Stelle und die 2. Stelle ist zehnmal mehr wert als die 1. Stelle.

Somit haben wir den Zusammenhang zwischen dem Wert einer Stelle (= Stellenwert) und der Basis erkannt.

Ein Beispiel mit der Dezimalzahl 6812 wird uns das noch deutlicher machen:

4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
6	8	1	2
10 x mehr wert als 10 x 10 also 100 x mehr wert als 10 x 10 x 10 also 1000 x mehr wert als	10 x mehr wert als 10 x 10 also 100 x mehr wert als	10 x mehr wert als	
d.h. 6 x 1000	d.h. 8 x 100	d.h. 1 x 10	d.h. 2 x 1

$$
\begin{array}{r}
2 \\
10 \\
800 \\
+\ 6000 \\
\hline
6812
\end{array}
$$

Für alle Zahlensysteme gilt folgende Regel, die wir uns wiederum merken wollen:

- Sind in einer Zahlenfolge eines beliebigen Zahlensystems in einer Stelle alle Ziffern des Zahlensystems durchlaufen worden, so folgt in dieser Stelle "0". Die links benachbarte Stelle wird um "1" erhöht. Jede Stelle ist B-mal mehr wert als ihr rechter Nachbar.

Unsere bisherigen Kenntnisse wollen wir überprüfen und anhand eines anderen Zahlensystems anwenden. Wir wählen dazu das Zahlensystem mit der Basis "4". Die Zahlenreihe sieht dann wie folgt aus:

0	= dezimal	0
1	= dezimal	1
2	= dezimal	2
3	= dezimal	3
10	= dezimal	4
11	= dezimal	5
12	= dezimal	6
13	= dezimal	7
20	= dezimal	8
21	= dezimal	9
22	= dezimal	10
23	= dezimal	11
30	= dezimal	12
31	= dezimal	13
32	= dezimal	14
33	= dezimal	15
100	= dezimal	16

Basis 4 heißt: Anzahl der Ziffern = 4, also 0, 1, 2, 3. - Stimmt!

Nach der größten Ziffer folgt immer die kleinste (nach 3 folgt 0). - Stimmt!

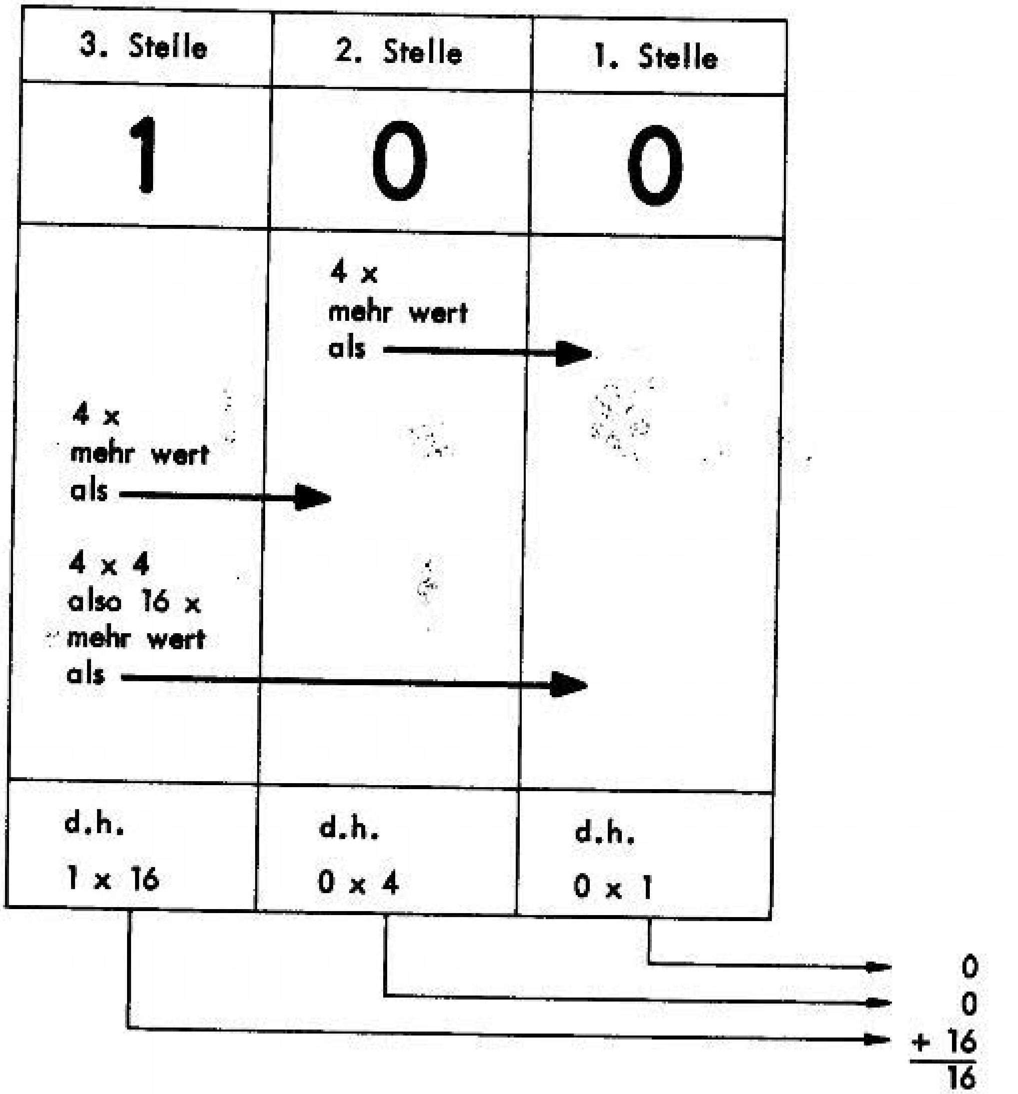
Wenn alle Ziffern des Systems in einer Stelle durchlaufen sind, wird diese Stelle "0" und die links benachbarte um "1" erhöht:

dezimal	3	entspricht	3
dezimal	4	entspricht	10
dezimal	7	entspricht	13
dezimal	8	entspricht	20
dezimal	11	entspricht	23
dezimal	12	entspricht	30
dezimal	15	entspricht	33
dezimal	16	entspricht	100

\- Stimmt alles!

Da die Basis des letzgenannten Zahlensystems "4" ist, muß also der Stellenwert einer Stelle hier 4mal größer sein, als der rechts benachbarte Stellenwert.

Dazu das Beispiel mit der Zahl 100, also dezimal 16:



Stimmt!

Erinnern wir uns ans Dezimalsystem. Die einzelnen Stellen lassen sich auf unterschiedliche Weise kennzeichnen, was uns aus nachfolgender Tabelle ersichtlich wird:

6	8	1	2
4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
oder	oder	oder	oder
Tausender	Hunderter	Zehner	Einser
oder	oder	oder	oder
$10 \times 10 \times 10 = 10^3$	$10 \times 10 = 10^2$	$10 = 10^1$	$1 = 10^0$

Die Stellenwerte könnten wir also auch als Potenzen von Zehn angeben. Das gilt natürlich nur für das Dezimalsystem. In einem Zahlensystem mit der Basis "6" wäre das z.B. so:

4	5	3	1
4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
oder	oder	oder	oder
Zweihundert-sechzehner	Sechsund-dreißiger	Sechser	Einser
oder	oder	oder	oder
$6 \times 6 \times 6 = 6^3$	$6 \times 6 = 6^2$	$6 = 6^1$	$1 = 6^0$

Allgemeinverbindlich für alle Zahlensysteme leiten wir daraus folgende Regel ab:

- Die Stellenwerte einer Zahl sind Potenzen der Basis des jeweiligen Zahlensystems.

Wer hat nicht schon mal etwas vergessen?

Das im folgenden mit kleinen Potenzrechnungen operiert wird, wollen wir unsere Kenntnisse im Potenzrechnen, soweit es erforderlich ist, im Arbeitsbogen Nr. 2 auffrischen.

Ein weiteres Merkmal von Zahlensystemen ist die Beziehung zwischen Stelle und Stellenwert. Das soll uns folgende kleine Tabelle verdeutlichen:

5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Stellenwert 10^4	Stellenwert 10^3	Stellenwert 10^2	Stellenwert 10^1	Stellenwert 10^0

Allgemeinverbindlich für alle Zahlensysteme ändert sich der Inhalt der Tabelle dann wie folgt:

5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Stellenwert B^4	Stellenwert B^3	Stellenwert B^2	Stellenwert B^1	Stellenwert B^0

Wir können uns also merken:

- Der Exponent eines Stellenwertes ist um 1 kleiner als die Ordnungszahl der Stelle (wie 1. Stelle, 2. Stelle usw.).

Dazu noch ein paar Beispiele:

Wenn wir z.B. den Stellenwert 2^6 kennen, dann wissen wir auch gleichzeitig, daß zum einen die Basis "2" ist und zum anderen, daß dieser Wert an der 7. Stelle steht.

Der Stellenwert 4^3 sagt dementsprechend aus, daß die Basis "4" ist und der Wert an der 4. Stelle steht.

Alle Zahlensysteme mit den bisher genannten Eigenschaften heißen

- Stellenwertsysteme.

Ein Zahlensystem mit der Basis "4" hat z.B. folgende Stellenwerte:

5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Stellenwert 4^4	Stellenwert 4^3	Stellenwert 4^2	Stellenwert 4^1	Stellenwert 4^0
Dezimalwert 256	Dezimalwert 64	Dezimalwert 16	Dezimalwert 4	Dezimalwert 1

Wenn wir z.B. den Wert der 6. Stelle eines Zahlensystems mit der Basis "2" errechnen sollten, hätten wir folgendes zu tun:

Wir wissen, daß der Exponent, wenn der Stellenwert als Potenz ausgedrückt ist, um "1" kleiner ist als die Ordnungszahl der Stelle, d.h. in unserem Fall, daß der Exponent um "1" kleiner sein muß als "6" (da 6. Stelle), also ist der Exponent 6 - 1 = 5: die Potenz lautet dementsprechend:

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Der Wert der 6. Stelle eines Zahlensystems mit der Basis "2" lautet dezimal 32.

Ohne Fleiß kein Preis! - Wir festigen unser neues Wissen, indem wir den Arbeitsbogen Nr. 3 durcharbeiten.

2. Aus technischen Gründen können elektronische Datenverarbeitungsanlagen Daten nicht dezimal verarbeiten. Es sind andere Zahlensysteme erforderlich, um Zahlen darzustellen. Das ist u.a. auf die elektrischen und elektronischen Bauteile zurückzuführen, die in Computern verwendet werden.

Eine bedeutende Rolle spielt hierbei das "Dualsystem" (lat. duo = zwei). Es ist so eng mit dem Dezimalsystem verwandt, daß uns beim Kennenlernen dieses Zahlensystems die bisher erworbenen Kenntnisse über die Eigenschaften des Dezimalsystems sehr zugute kommen.

2.1. Es gibt im Dualsystem nur zwei Ziffern:

0 und 1

Die größte Ziffer ist demnach "1" und die Basis entsprechend "2". Daraus resultiert, daß die Stellenwerte einer Dualzahl Potenzen von "2" sind.

6. Stelle	5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Stellenwert 2^5	Stellenwert 2^4	Stellenwert 2^3	Stellenwert 2^2	Stellenwert 2^1	Stellenwert 2^0
Dezimalwert 32	Dezimalwert 16	Dezimalwert 8	Dezimalwert 4	Dezimalwert 2	Dezimalwert 1

Dieses Dualsystem ist also vom Ziffern- bzw. Zeichenvorrat aus betrachtet so klein, daß zur Auswahl einer Ziffer aus dem gesamten System lediglich eine Entweder-Oder-Entscheidung ansteht:

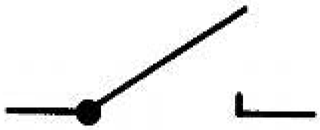
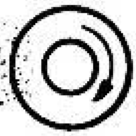
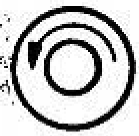
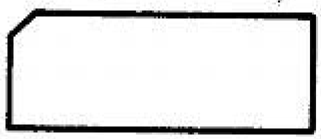
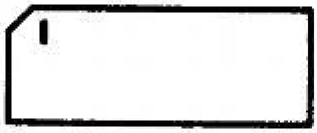
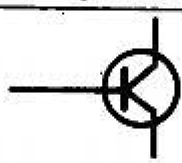
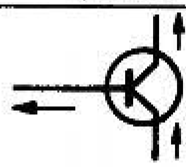
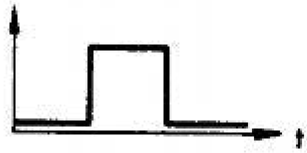
Entweder die Zahl heißt **0**

oder .... die Zahl heißt **1**

Man spricht auch in diesem Zusammenhang von "Binär"-Entscheidungen ("binär" ist auf das lateinische Wort "bi" = zwei zurückzuführen).
In der elektronischen Datenverarbeitung wird für eine derartige Alternativ-Entscheidung die Einheit "Bit" verwendet. In dem Begriff "binary digit" (engl. = Binärziffer) hat das Wort "Bit" seinen Ursprung.

Und da das Dualsystem lediglich eines von mehreren Systemen ist, das sich auf den Vorrat von zwei verschiedenen Zeichen beschränkt, steht über all diesen Systemen der Oberbegriff "Binärsysteme".

Um noch ein wenig mehr über das Bit, das entweder den Zustand "0" oder den Zustand "1" annimmt, zu erfahren, wollen wir uns einmal ansehen, in welchen verschiedenen Formen es sich darstellen läßt, denn eine bekannte Tatsache ist die, daß alle Theorie grau ist und erst durch die Anschauung praxisnah wird:

Binär-Element	zwei mögliche Zustände	
Binärziffer	0	1
Schalter	 offen	 geschlossen
Magnetkern	 Rechtsmagnetisierung	 Linksmagnetisierung
Lochstelle einer Lochkarte	 ungelocht	 gelocht
Transistor	 nicht leitend	 leitend
Spannungs-impuls	 Impuls nicht vorhanden	 Impuls vorhanden

Wir erinnern uns, wie wir Dezimalzahlen nach Stellenwerten in Potenzen von 10 aufgegliedert haben. Dazu ein Beispiel mit der Dezimalzahl 5304:

5	3	0	4
5×10^3 +	3×10^2 +	0×10^1 +	4×10^0
5000 +	300 +	0 +	4

2.2. Dieses Prinzip gilt auch für das Dualsystem. Da hier die Basis jedoch "2" ist, müssen wir für die Stellenwerte Potenzen von Zwei angeben. Folgendes Beispiel soll uns das veranschaulichen. Wir verwenden die Dualzahl 1101:

1	1	0	1
1×2^3 +	1×2^2 +	0×2^1 +	1×2^0
8 +	4 +	0 +	1

Die Dualzahl 1101 hat demnach den gleichen Wert wie die Dezimalzahl 13.

Hier noch einige Beispiele dafür, wie wir Dualzahlen in Dezimalzahlen ausdrücken:

a) $110 = 2^2 + 2^1 = 4 + 2 = 6$

b) $1011 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$

c) $11110 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$

d) $10001 = 2^4 + 2^0 = 16 + 1 = 17$

Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen! - Deswegen üben wir das Umwandeln von Dualzahlen in Dezimalzahlen mittels Arbeitsbogen Nr. 4.

2.3. Ebenso wie uns bei der Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen die Tabelle der Zweierpotenzen genützt hat, sind uns auch bei der Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen die Potenzen von Zwei eine große Hilfe.

Wir wollen den Rechenvorgang anhand eines Beispiels mit der Dezimalzahl 141, die in eine Dualzahl umgewandelt werden soll, kennenlernen.

Zunächst stellen wir fest, welches die größte in dezimal 141 enthaltene Zweierpotenz ist. Die Tabelle zeigt uns, daß es 128, also 2^7 ist. Dementsprechend wird die Dualzahl achtstellig, denn wir wissen ja, daß die Ordnungszahl der Stelle immer um 1 größer ist, als der Exponent des als Potenz dargestellten Stellenwertes. Unter 2^7 schreiben wir also eine "1":

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1							

Von 141 werden nun 128 subtrahiert. Die Differenz beträgt 13. Die größte in 13 enthaltene Zweierpotenz ist 8, also 2^3. Demgemäß tragen wir in unserer kleinen Tabelle auch unter 2^3 eine 1 ein:

$$\begin{array}{r} 141 \\ -\ 128 \\ \hline 13 \end{array}$$

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1				1			

Wir haben festgestellt, daß in 13 die Potenzen $2^6 = 64$, $2^5 = 32$ und $2^4 = 16$ nicht enthalten sind und müssen damit entsprechend unter diese Stellen jeweils eine 0 eintragen:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	1			

Nun haben wir wieder zu rechnen: 13 - 8 = 5. Die größte in 5 enthaltene Zweierpotenz ist 4, also 2^2. Wir tragen also unter 2^2 eine 1 ein:

$$\begin{array}{r} 13 \\ -\ 8 \\ \hline 5 \end{array}$$

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	1	1		

Von 5 haben wir wieder 4 zu subtrahieren und erhalten als Differenz 1. Die größte in 1 enthaltene Zweierpotenz ist 1, also 2^0. Somit tragen wir unter 2^0 wiederum eine 1 ein:

$$\begin{array}{r} 5 \\ -\ 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	$\boxed{2^0}$
1	0	0	0	1	1		$\boxed{1}$

Da in 1 die Potenz $2^1 = 2$ nicht enthalten ist, müssen wir entsprechend unter 2^1 eine 0 eintragen. Unter jedem Stellenwert steht nun eine Dualziffer und die Umwandlung ist damit abgeschlossen:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	$\boxed{2^1}$	2^0
1	0	0	0	1	1	$\boxed{0}$	1

Die Dezimalzahl 141 entspricht also der Dualzahl 1000 1101.

Sehen wir uns noch einmal die Umwandlung im Zusammenhang an:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	1	1	0	1

$$\begin{array}{r} 141 \\ -\ 128 \\ \hline 13 \\ -\ 8 \\ \hline 5 \\ -\ 4 \\ \hline 1 \\ -\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Lernen ist wie Rudern gegen den Strom. Sobald man aufhört, treibt man zurück! – Nehmen wir uns also den Arbeitsbogen Nr. 5 zur Hand und lösen die dort aufgeführten Umwandlungsaufgaben in der bisher kennengelernten Weise.

2.4. Außer diesem Verfahren gibt es noch eine weitere Methode, Dezimalzahlen in Dualzahlen umzuwandeln. Dabei wird die Dezimalzahl solange durch die Basis des Dualsystems, nämlich durch "2" dividiert, bis das Ergebnis der letzten Division "0 Rest 1" ist. Alle bei der fortgesetzten Division durch 2 anfallenden Reste entsprechen dabei den Ziffern der Dualzahl, Durch das folgende Beispiel wird uns das noch deutlicher:

Die Dezimalzahl 43 soll in eine Dualzahl umgewandelt werden:

43 : 2 = 21 Rest **1**
21 : 2 = 10 Rest **1**
10 : 2 = 5 Rest **0**
5 : 2 = 2 Rest **1**
2 : 2 = 1 Rest **0**
1 : 2 = 0 Rest **1**

$\boxed{10\ 1011}$

Die gesuchte Dualzahl ergibt sich aus den Resten, die wir von unten nach oben lesen müssen. Die Dezimalzahl 43 entspricht also der Dualzahl 10 1011.

Auf sehr einfache Weise können wir kontrollieren, ob wir auch richtig gerechnet haben:

Jede "1" einer Dualzahl sagt uns, daß diese Zweierpotenz "zählt". Entsprechend wird durch eine "0" ausgesagt, daß an der jeweiligen Stelle, wo die "0" im Stellenwert steht, die Zweierpotenz "nicht zählt".

Kontrollieren wir also einmal das Ergebnis unserer letzten Aufgabe:

1	0	1	0	1	1		
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		
zählt	zählt nicht	zählt	zählt nicht	zählt	zählt		
32 +	0 +	8 +	0 +	2 +	1	=	43

Manches Vergnügen besteht darin, daß man mit Vergnügen darauf verzichtet.- Wir wollen jedoch nicht auf unser Vergnügen verzichten, mit Elan die Aufgaben des Arbeitsbogens Nr. 6 zu lösen. Es sind dort nach dem Verfahren der fortgesetzten Teilung durch "2" Dezimalzahlen in Dualzahlen umzuwandeln.

2.5. Als letzte Methode, Dezimalzahlen in Dualzahlen umzuwandeln, wollen wir das Verfahren der fortgesetzten Division der Dezimalzahl durch alle Zweierpotenzen durchführen, d.h. wir beginnen mit der größtmöglichen Zweierpotenz als Divisor, die in der Dezimalzahl enthalten ist. Wir dividieren so lange, bis wir durch die kleinste Zweierpotenz also durch "2^0", d.h. durch "1" dividiert haben.

In diesem Fall entsprechen die einzelnen Teilergebnisse (ohne die Reste), von oben nach unten gelesen, zusammengefaßt die gesuchte Dualzahl. Dazu ein Beispiel:

Die Dezimalzahl 89 soll durch fortgesetzte Division aller Zweierpotenzen in eine Dualzahl umgewandelt werden:

89 : 64 =	1	Rest 25
25 : 32 =	0	Rest 25
25 : 16 =	1	Rest 9
9 : 8 =	1	Rest 1
1 : 4 =	0	Rest 1
1 : 2 =	0	Rest 1
1 : 1 =	1	Rest 0

→ **101 1001**

Es heißt: Man muß nur wissen, wo alles geschrieben steht! - Jedoch wollen wir uns in einer gewissen Unabhängigkeit üben, was wir durch die Ausarbeitung des Arbeitsbogens Nr. 7 erreichen wollen, inddem Dezimalzahlen in der zuletzt genannten Methode in Dualzahlen umgewandelt werden sollen.

Nun wird es uns nicht mehr schwer fallen, die nachfolgende Tabelle zu ergänzen. Gefragt ist nach den Dualzahlen, die den jeweiligen Dezimalzahlen entsprechen:

Dezimalzahl	Dualzahl				
0					0
1					1
2				1	0
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Wenn Interesse besteht, können wir dieses Spielchen fortsetzen in dem vorbereiteten Arbeitsbogen Nr. 8.

Abschließend schauen wir uns noch einmal die ersten Zweierpotenzen, mit denen wir bisher gerechnet haben, an:

2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}

Mit diesem Schema vor Augen werden wir schnell und sicher Umwandlungen von Dezimalzahlen und Dualzahlen vornehmen können.

Man kann es sich insofern leicht merken, als nämlich deutlich zu erkennen ist, wie sich der dezimale Wert in den Stellenwerten von rechts nach links immer wieder verdoppelt.

2.6. Die Zahlen des Dualsystems sind uns nun soweit bekannt, daß wir endlich dazu übergehen können, auch Additionen dieses Zahlensystems durchzuführen.

Besonders einfach sind die Grundregeln der Addition im Dualsystem:

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Lediglich die letzte Regel scheint uns im ersten Moment etwas ungewohnt. Stellen wir einmal die Aufgaben im Dualsystem und im Dezimalsystem gegenüber:

dual	dezimal
$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$

Daß das Ergebnis der dualen Addition 1 + 1 = 10 sein muß, leuchtet insofern ein, als wir wissen, wie das Ergebnis im Dezimalsystem lautet, nämlich "2". Und wie dezimal "2" dual geschrieben wird, ist uns auch klar: "10".

Erinnern wir uns an das Dezimalsystem mit einer ähnlichen einfachen Addition:

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Es tritt ein Übertrag auf, d.h. das Ergebnis dieser Addition läßt sich nicht mehr in der 1. Stelle unterbringen. Auf die 2. Stelle wird also etwas übertragen. Das geschieht immer dann, wenn Additionen innerhalb eines Stellenwertes einen Wert ergeben, der größer als die größte Ziffer des jeweiligen Zahlensystems ist.

Für das Dezimalsystem bedeutet das, daß ein Übertrag entsteht, wenn der Wert größer als "9" ist. Und für das Dualsystem bedeutet das, daß ein Übertrag entsteht, wenn der Wert größer als "1" ist.

Nach dieser Erkenntnis wird es uns keine Mühe mehr bereiten, auch noch folgende Addition durchzuführen:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

Wenn die Aufgabe nämlich in zwei Schritte zergliedert wird, ist also...

der 1. Schritt

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

und der 2. Schritt

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

Die Grundregeln sind uns nun bekannt, so daß wir einmal sehen wollen, wie folgende Addition durchgeführt wird: 1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1:

Schritt für Schritt wollen wir sehen, was geschieht. Dazu sei erwähnt, daß für die Überträge, die wir gewohnter Weise klein über den Summenstrich schreiben, in diesem Fall wegen der Übersicht eine besondere Zeile vorbereitet ist.

1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 ――――― 0	1. Summand 2. Summand Übertrag	1 + 1 = 1 0 , d.h. "0" kommt unter den Summenstrich in die 1. Stelle, und "1" kommt als Übertrag in die 2. Stelle.
1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 1 ――――― 0 0	1. Summand 2. Summand Übertrag	0 + 1 = 1, dazu kommt der Übertrag. Vollständig heißt es also: 0 + 1 + 1 (=Übertrag) = 1 0 , d.h. "0" kommt unter den Summenstrich in die 2. Stelle, und "1" kommt als Übertrag in die 3. Stelle.
1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 1 1 ――――― 0 0 0	1. Summand 2. Summand Übertrag	0 + 1 = 1, dazu kommt der Übertrag. Vollständig heißt es also: 0 + 1 + 1 (=Übertrag) = 1 0 , d.h. "0" kommt unter den Summenstrich in die 3. Stelle, und "1" kommt als Übertrag in die 4. Stelle.
1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ――――― 1 0 0 0	1. Summand 2. Summand Übertrag	1 + 1 = 1 0 , dazu kommt der Übertrag. Vollständig heißt es also: 1 + 1 + 1 (=Übertrag) = 1 1 , d.h. eine "1" kommt unter den Summenstrich in die 4. Stelle, und eine "1" kommt als Übertrag in die 5. Stelle.
1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ――――― 1 1 0 0 0	1. Summand 2. Summand Übertrag	1 + 1 = 1 0 , dazu kommt der Übertrag. Vollständig heißt es also: 1 + 1 + 1 (=Übertrag) = 1 1 , d.h. eine "1" kommt unter den Summenstrich in die 5. Stelle, und eine "1" kommt als Übertrag in die 6. Stelle.
1 1 0 0 1 + 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ――――― 1 1 1 0 0 0	1. Summand 2. Summand Übertrag Summe	Da in der 6. Stelle nur der Übertrag "1" steht, kommt entsprechend auch unter den Summenstrich eine "1". Die Addition ist damit abgeschlossen.

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses können wir kontrollieren, indem wir die Addition dezimal durchführen: 25 + 31 = 56. Weitere Aufgaben finden wir im Arbeitsbogen Nr. 9, die wir dort selbständig lösen wollen.

2.7. Ebenso wie bei der Addition können wir bei der Subtraktion im Dualsystem von 4 Grundregeln ausgehen.

$$\begin{array}{r} 0 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ -\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Unsere Besondere Beachtung dürfte wohl wieder die letzte Regel finden. Wir erinnern uns noch schwach daran, wie wir als Schulanfänger die Subtraktion im Dezimalsystem erlernt haben. Es war da von "Leihen" und "Borgen" die Rede. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{array}{r} 96 \\ -\ 39 \\ \hline \end{array}$$

Wir erkennen, daß der Minuend "96" größer ist als der Subtrahend "39". Das Ergebnis muß also positiv sein. Wenn wir schrittweise vorgehen, müssen wir zunächst rechnen: 6 - 9. Das sind normalerweise - 3. Aber so können wir hier nicht verfahren. Wir müssen uns demnach "einen borgen" (und zwar von der Ziffer des links benachbarten Stellenwertes).

Das sibht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\,10} \\ \cancel{9}6 \\ -\ 39 \\ \hline 57 \end{array}$$

Wir "borgen uns einen" von der "9". Da der Wert "1" der 2. Stelle zehnmal größer ist, als ein Wert "1" der 1. Stelle, entspricht also "ein" Zehner "zehn" Einern. Für die Subtraktion im 1. Stellenwert kommt also zum Minuend "6" noch "10" hinzu. Der Rechengang sieht dann wie folgt aus:

10	+	6	= 16 -	9	= 7
(geborgt)		(Minuend)		(Subtrahend)	

Unter den Strich kommt in der 1. Stelle die "7" hin. Da wir uns von der 2. Stelle "einen geborgt" haben, entspricht der Minuend der 2. Stelle nicht mehr dem Wert "9", sondern 9 - 1 = 8. Der Rechengang sieht dann wie folgt aus:

9	-	1	= 8 -	3	= 5
(Minuend)		(geborgt)		(Subtrahend)	

In der 2. Stelle kommt dann somit unter den Strich die "5".

Und nicht anders ist das Subtrahieren im Dualsystem. Kehren wir dazu zurück zur 4. Regel: 10 - 1 = 1. Die Rechenwege sehen wie folgt aus:

$$\begin{array}{rr} & {}^{+1} \\ {}^{-1} & {}^{+1} \\ 1 & 0 \\ - & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Die Subtraktion innerhalb der 1. Stellenwerte heißt zunächst: 0 - 1. Wir müssen uns demgemäß von der 2. Stelle "einen borgen". Es ist uns bekannt, daß im Dualsystem der Wert einer Stelle doppelt so groß ist, also zweimal so groß ist wie der Wert der rechts benachbarten Stelle. D.h. die "1" der 2. Stelle, die wir uns "borgen", entspricht zwei "Einsen", also 1 + 1 in der 1. Stelle. Nun können wir die Differenz für den 1. Stellenwert errechnen, nämlich:

(1 + 1) +	0	-	1	= 1
(geborgt)	(Minuend)		(Subtrahend)	

Da wir uns "einen geborgt" haben, entspricht also der Minuend der 2. Stelle nicht mehr "1" sondern:

1	-	1	=	0
(Minuend)		(verborgt)		(neuer Minuend)

Für die 2. Stelle ist kein Subtrahend vorhanden, er ist sozusagen "0". Der Rechengang innerhalb der 2. Stelle wird dann also wie folgt fortgesetzt:

0	-	0	= 0
(neuer Minuend)		(Subtrahend)	

Die Differenz aus 10 - 1 ist demnach 1.

Statt der Gedankenstützen "-1" und "+1" über den Ziffern, können wir folgendermaßen einfacher verfahren:

$$\begin{array}{rr} 1 & \\ \cancel{1} & 0 \\ - & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Die "1" der 2. Stelle haben wir uns ja geliehen und können sie dementsprechend streichen. Jetzt brauchen wir nur noch von den sich daraus ergebenen zwei "Einsen" in der 1. Stelle und somit den neuen Minuenden darstellen, den Subtrahenden "1" subtrahieren und erhalten als Differenz "1".

Wenden wir uns nun einer größeren Aufgabe zu, deren Rechengänge wir wieder Schritt für Schritt verfolgen wollen: 10101 - 1111

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ - & & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ \hline & & & & & \boxed{0} \end{array}$$

Zunächst rechnen wir in der 1. Stelle 1 - 1 = 0.

$$\begin{array}{rccccc} & & & & \boxed{1} & \\ & & & & \boxed{1} & \\ & 1 & 0 & \boxed{\cancel{1}} & \boxed{0} & 1 \\ - & & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ \hline & & & & \boxed{1} & 0 \end{array}$$

Jetzt führen wir die Subtraktion der 2. Stelle durch: 0 - 1, d.h. wir müssen uns von der links benachbarten Stelle "einen borgen" und streichen die "1" in der 3. Stelle durch. Sie wir somit zu "0". In der 2. Stelle steht uns jetzt zweimal die "1" als Minuend zur Verfügung, d.h. wir können jetzt rechnen:

$$\underset{\text{(geborgt)}}{(1 + 1)} - \underset{\text{(Subtrahend)}}{1} = 1$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & \boxed{\cancel{1}} & 0 & 1 \\ - & & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \end{array}$$

Der Minuend der 3. Stelle ist durch das "Borgen" zu "0" geworden, was dadurch sichtbar ist, daß die "1" durchgestrichen wurde. Die Subtraktion innerhalb der 3. Stelle lautet also zunächst : 0 - 1. Das bedeutet wiederum, daß wir uns von der links benachbarten Stelle "einen borgen" müssen. Diese Stelle (die 4.) ist jedoch "0". D.h. wir müssen noch eine Stelle weiter nach links gehen und uns von dort (von der 5. Stelle also) "einen borgen". Für die Subtraktion innerhalb der 3. Stelle "borgen" wir uns demnach "einen" von der 5. Stelle.

$$\begin{array}{rccccc} & & \boxed{1} & & & \\ & & \boxed{1} & & & \\ & \boxed{\cancel{1}} & \boxed{0} & \cancel{1} & 0 & 1 \\ - & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \end{array}$$

Dazu müssen wir folgendermaßen verfahren: Die "1" der 5. Stelle wird zu "0" und streichen sie somit durch. D.h. daß für die 4. Stelle zunächst als Minuend zweimal die "1" zur Verfügung steht. Wir müssen jedoch erst die Subtraktion in der 3. Stelle durchführen, was jetzt möglich ist, indem wir uns von der 4. Stelle "einen borgen".

$$\begin{array}{rccccc} & & \boxed{1} & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{\cancel{1}} & \boxed{1} & & \\ & \cancel{1} & 0 & \boxed{\cancel{1}} & 0 & 1 \\ - & & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \hline & & & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}$$

Eine "1" vom Minuenden der 4. Stelle wird somit durchgestrichen, und zweimal steht nun die "1" in der 3. Stelle als Minuend an: wir rechnen also in der 3. Stelle:

(1 + 1) - 1 = 1
(geborgt) (Subtrahend)

$$\begin{array}{rccccc} & & \boxed{1} & & & \\ & & \boxed{\cancel{1}} & & & \\ & \cancel{1} & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \\ - & & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Die Subtraktion in der 4. Stelle heißt nun:

1 + 0 - 1 = 0
(geborgt) (Minuend) (Subtrahend)

$$\begin{array}{rccccc} & \boxed{\cancel{1}} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ - & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & \boxed{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Schließlich heißt die Subtraktion in der 5. Stelle, da der Minuend zu "0" geworden ist:

0 - 0 = 0
(Minuend) (Subtrahend)

Die Differenz aus der Subtraktion 10101 - 1111 ist also 110.

Was heute nicht geschieht, ist morgen nicht getan, und keinen Tag soll man verpassen. - Das heißt für uns, daß wir jetzt den Arbeitsbogen Nr. 10 durcharbeiten. Es sind darin Subtraktionsaufgaben mit Dualzahlen nach dem vorangegangenen Muster zu lösen.

2.8. Wir haben erfahren müssen, daß das Verfahren mit dem "Borgen" zwar einfach ist, jedoch reichlich unübersichtlich, so daß sich leicht ein Fehler einschleicht. Und außerdem können Computer auch gar nicht subtrahieren. Ja - wir haben ganz richtig gelesen. Computer können eigentlich nur addieren. Aber wir wissen doch, daß sie alle möglichen Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben lösen können. Auch das stimmt, denn alle Grundrechnungsarten lassen sich auf die Addition zurückführen.

Z.B. die Multiplikation 3 x 8 = 24. D.h. doch nichts anderes als die Addition 8 + 8 + 8 = 24. Dreimal steht die "8" als Summand.

Ebenso läßt sich die Division zunächst auf die Subtraktion zurückführen. Dazu das Beispiel 36 : 9 = 4:

36	
- 9	1. Subtraktion
27	
- 9	2. Subtraktion
18	
- 9	3. Subtraktion
9	
- 9	4. Subtraktion
0	

Die Anzahl der Subtraktionen bis zur Differenz 0 (hier waren es vier Subtraktionen) gibt also den Quotienten an.

Die Subtraktion läßt sich wiederum auf die Addition zurückführen und zwar geschieht das mittels der Komplementierung. Durch einige Beispiele wollen wir erfahren, was das eigentlich ist - Komplementieren:

Das Komplement zu **8** ist **1**

Das Komplement zu **4** ist **5**

Das Komplement zu **3** ist **6**

Die Gesetzmäßigkeit ist leicht zu erkennen. Addieren wir nämlich die zwei Ziffern einer jeden Zeile des obigen Beispiels, so erhalten wir als Summe immer "9", denn:

$$8 + 1 = 9$$
$$4 + 5 = 9$$
$$3 + 6 = 9$$

Wir könnten auch sagen:

Von 8 bis 9 ist 1 .
Von 4 bis 9 ist 5 .
Von 3 bis 9 ist 6 .

Beim Komplementieren handelt es sich also lediglich um das Ergänzen einer Zahl zu einer bestimmten anderen.

Diese bestimmte Zahl war in unseren bisherigen Beispielen immer die "9". Und die "9" im Dezimalsystem ist, wie wir wissen, der Wert (B - 1). Somit läßt sich sagen, daß wir also mit dem (B-1)-Komplement gearbeitet haben.

Demnach müßte es auch ein B-Komplement geben. Das ist richtig. Wenn wir nämlich mit dem B-Komplement rechnen, bedeutet das für das Dezimalsystem, daß wir zur nächstgrößeren Basis-Potenz ergänzen (zu "10", zu "100", zu "1000" usw.).

Das B-Komplement zu 8 ist somit 2 .
Das B-Komplement zu 4 ist somit 6 .
Das B-Komplement zu 3 ist somit 7 .

- Das B-Komplement einer Zahl ist immer um 1 größer als das (B-1)-Komplement.

Es hätte demnach bei den ersten Komplementbildungen auf Seite 30 besser geheißen: Das (B-1)-Komplement zu 8 ist 1 usw.

Zur Komplement-Bildung noch ein paar Beispiele:

Mit B-Komplement	Mit (B-1)-Komplement
9708 = Zahl 292 = B-Komplement	6971 = Zahl 3028 = (B-1)-Komplement
3120 = Zahl 6880 = B-Komplement	17111 = Zahl 82888 = (B-1)-Komplement
4111 = Zahl 5889 = B-Komplement	7990 = Zahl 2009 = (B-1)-Komplement

Noch ein kleiner Tip:

Sowohl beim B-Komplement als auch beim (B-1)-Komplement ergänzen wir jede Ziffer zu "9". Beim B-Komplement müssen wir lediglich noch eine "1" hinzuaddieren.

Frisch gewagt ist halb gewonnen! - Zwar sind die Komplementbildungen im Arbeitsbogen Nr. 11 besonders leicht, aber eine gewisse Routine können wir damit auf alle Fälle erreichen.

Die Zahlen, die sich durch Komplementieren gegenüberstehen, können wir als Paare komplementärer Ziffern bzw. Zahlen bezeichnen.

Im Dezimalsystem gibt es demnach zehn Ziffernpaare.

0	und	9
1	und	8
2	und	7
3	und	6
4	und	5
5	und	4
6	und	3
7	und	2
8	und	1
9	und	0
(B-1)-Komplemt.		

0	und	0
1	und	9
2	und	8
3	und	7
4	und	6
5	und	5
6	und	4
7	und	3
8	und	2
9	und	1
B-Komplement		

Im Dualsystem gibt es jedoch nur zwei Paarungen. Das sind hinsichtlich des (B-1)-Komplements folgende:

0 und 1
1 und 0

Wie läßt sich das beweisen? - Ganz einfach: Die Basis des Dezimalsystems ist "2". Der (B-1)-Wert ist also 1.

Wenn wir also 0 zu 1 ergänzen, erhalten wir 1, und
wenn wir 1 zu 1 ergänzen, erhalten wir 0.

Demnach dürfte es besonders einfach sein, das (B-1)-Komplement einer Dualzahl zu bilden:

1 wird in 0 umgewandelt und
0 wird in 1 umgewandelt.

In diesem Zusammenhang spricht man auch von "Invertieren", was so viel wie Umkehren heißt.

Dazu einige Beispiele:

1010 = Zahl
0101 = (B-1)-Komplement

11011 = Zahl
00100 = (B-1)-Komplement

10001 = Zahl
01110 = (B-1)-Komplement

Erinnern wir uns an die Komplement-Paarungen des Dezimalsystems. Bei der Addition der (B-1)-Komplement-Paare war das Ergebnis immer "9".

Übertragen auf das Dualsystem würde das bedeuten, daß die Addition aller (B-1)-Komplement-Paare immer "1" ergeben müßte. Das wollen wir untersuchen:

$$\begin{array}{rl} 1010 & = \text{Zahl} \\ \underline{+\ 0101} & = \text{(B-1)-Komplement} \\ 1111 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 11011 & = \text{Zahl} \\ \underline{+00100} & = \text{(B-1)-Komplement} \\ 11111 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 10001 & = \text{Zahl} \\ \underline{+01110} & = \text{(B-1)-Komplement} \\ 11111 & \end{array}$$

Und nun zum B-Komplement. Wir erhalten es, indem wir die Dualzahl zur nächstgrößeren Zweierpotenz ergänzen. Rein rechnerisch gehen wir dann der Einfachheit halber so vor, daß wir erst das (B-1)-Komplement bilden und dann eine "1" hinzuaddieren, denn uns ist ja bekannt, daß sich das B-Komplement vom (B-1)-Komplement lediglich darin unterscheidet, daß das B-Komplement um "1" größer ist als das (B-1)-Komplement.

Dazu einige Beispiele:

```
   1111 = Zahl
   ----
   0000 = (B-1)-Komplement
 +    1
   ----
   0001 = B-Komplement

   1001 = Zahl
   ----
   0110 = (B-1)-Komplement
 +    1
   ----
   0111 = B-Komplement

   1010 = Zahl
   ----
   0101 = (B-1)-Komplement
 +    1
   ----
   0110 = B-Komplement
```

Weitere Komplementbildungen üben wir im Arbeitsbogen Nr. 12.

2.9. Wie aus der Subtraktionsaufgabe eine Additionsaufgabe bzw. eine Komplement-Addition wird, soll uns folgendes Beispiel mit Dezimalzahlen verdeutlichen. Wir rechnen zunächst mit dem B-Komplement:

256	Minuend
− 063	Subtrahend (mit Nullen auf Länge des Minuenden gebracht)
937	B-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ 256	Minuend noch einmal hinschreiben und zum B-Komplement des Subtrahenden addieren
$\cancel{1}$193	Summe aus: B-Komplement vom Subtrahend + Minuend
	In der vordersten Stelle ist ein Übertrag aufgetreten, der zu streichen ist. Die verbleibende Zahl (hier 193) ist die Differenz aus der Subtraktion 256 − 63. Da der Minuend größer ist als der Subtrahend, ist das Ergebnis positiv.

Wir üben dieses Verfahren der Subtraktion im Arbeitsbogen Nr. 13 ein.

Dieselbe Aufgabe wollen wir nun lösen, indem wir das (B-1)-Komplement anwenden:

256	Minuend
$-\ 063$	Subtrahend (mit Nullen auf Länge des Minuenden gebracht)
936	(B-1)-Komplement vom Subtrahenden bilden
$+\ 256$	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
$\cancel{1}192$	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
$+\ 1$	In der vordersten Stelle ist ein Übertrag aufgetreten, der zu streichen ist. Eine "1" ist hinzuzuaddieren.
193	Die Summe daraus ist die Differenz der Subtraktion 256 - 63. Der Minuend ist größer als der Subtrahend. Folgedessen ist das Ergebnis positiv.

Diese Methode zu subtrahieren wollen wir auch im Arbeitsbogen Nr. 14 anwenden.

Im letzten Beispiel war der Minuend größer als der Subtrahend und die Differenz somit positiv.

Sehen wir uns nun noch an, wie zu rechnen ist, wenn der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Die Differenz wird dann negativ sein. Zunächst rechnen wir mit dem B-Komplement:

23	Minuend
- 289	Subtrahend
711	B-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ 23	Minuend noch einmal hinschreiben und zum B-Komplement des Subtrahenden addieren
734	Summe aus: B-Komplement vom Subtrahend + Minuend
- 266	In der vordersten Stelle (hier die 3. Stelle) ist kein Übertrag entstanden. Deshalb wird von der letzten Summe (hier 734) noch einmal das B-Komplement gebildet (es wird rekomplementiert). Der so entstandene Wert bekommt noch ein negatives Vorzeichen und stellt somit die Differenz aus der Subtraktion dar.

Im Arbeitsbogen Nr. 15 finden wir weitere Beispiele dieser Art.

Dieselbe Aufgabe wollen wir nun lösen, indem wir das (B-1)-Komplement anwenden:

23	Minuend
- 289	Subtrahend
710	(B-1)-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ 23	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
733	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
- 266	In der vordersten Stelle (hier 3. Stelle) ist kein Übertrag entstanden. Deshalb wird von der letzten Summe (hier 733) noch einmal das (B-1)-Komplement gebildet (es wird rekomplementiert). Der so entstandene Wert bekommt ein negatives Vorzeichen und stellt somit die Differenz aus der Subtraktion dar.

Lösen wir nun die Subtraktionsaufgaben des Arbeitsbogens Nr. 16 in der gleichen Weise.

2.10. Die Regeln der Komplement-Addition, die wir bisher für das Dezimalsystem anwendeten, gelten entsprechend auch für das Dualsystem. An zwei Beispielen wollen wir das nachprüfen. Einmal soll der Minuend größer sein als der Subtrahend. Und im anderen Beispiel ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Da es einfacher ist, im Dualsystem mit dem (B-1)-Komplement zu arbeiten (aus 0 wird 1, und aus 1 wird 0), verzichten wir hier auf die Vorstellung von Beispielen mit dem B-Komplement. Zunächst also ein Beispiel, in dem der Minuend größer ist als der Subtrahend:

11100	Minuend
- 01011	Subtrahend (mit Nullen auf Länge des Minuenden gebracht)
10100	(B-1)-Komplement des Subtrahenden bilden
+ 11100	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
~~1~~10000	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
+ 1	In der vordersten Stelle ist ein Übertrag aufgetreten, der zu streichen ist. Eine "1" ist hinzuzuaddieren.
10001	Die Summe daraus ist die Differenz der Subtraktion 11100 - 1011. Der Minuend ist größer als der Subtrahend. Folgedessen ist das Ergebnis positiv.

Im nächsten Beispiel ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Wir wenden wieder das (B-1)-Komplement an:

1010	Minuend
- 10111	Subtrahend
01000	(B-1)-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ 1010	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
10010	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
- 1101	In der vordersten Stelle (hier 5. Stelle) ist kein Übertrag entstanden. Deshalb wird von der letzten Summe (hier 10010) noch einmal das (B-1)-Komplement gebildet (es wird rekomplementiert). Der so entstandene Wert bekommt noch ein negatives Vorzeichen und stellt somit die Differenz aus der Subtraktion 1010 - 10111 dar.

Im Arbeitsbogen Nr. 17 wollen wir das Gelernte mit einigen Übungsaufgaben festigen.

3. Inzwischen haben wir festgestellt, daß die Handhabung der Dualzahlen wegen ihrer großen Anzahl an Stellen etwas umständlich ist. Aus diesem Grund wendet man im Bereich der elektronischen Datenverarbeitung z. B. das Sedezimalsystem an (lat. sedecem = 16). Es stellt eine verkürzte Schreibweise des Dualsystems dar.

Wenn also die Basis dieses Sedezimalsystems "16" ist, dann wissen wir nach den bisher in diesem Text erworbenen Kenntnissen auch noch folgendes:

- Das Sedezimalsystem besteht aus 16 verschiedenen Ziffern.
- Die größte Ziffer des Sedezimalsystems ist "B-1" = 15.
- Als Stellenwerte des Sedezimalsystems gelten die Potenzen von 16.

Nun kennen wir leider nur zehn verschiedene Zahlensymbole und brauchen aber für das Sedezimalsystem insgesamt sechzehn Zahlzeichen.

3.1 Stellen wir einmal einige Zahlen der verschiedenen Zahlensysteme gegenüber, indem wir jeweils den größten Ziffernwert in jede Stelle schreiben:

3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle	
9	9	9	Dezimalzahl
1	1	1	Dualzahl
15	15	15	Sedezimalzahl

Diese Zahlen sehen in ihrer normalen Schreibweise dann so aus:

999	Dezimalzahl
111	Dualzahl
151515	Sedezimalzahl

Wenn wir wissen, daß 999 eine Dezimalzahl ist, dann kennen wir somit auch ihren dezimalen Wert. Ebenso können wir genau errechnen, welchen dezimalen Wert die Dualzahl 111 hat, wenn wir wissen, daß es sich auch tatsächlich um eine Dualzahl handelt.

Allerdings gibt es im Sedezimalsystem in dieser Hinsicht einige Schwierigkeiten. Das soll uns an folgendem Beispiel klar werden:

Wir nehmen an, daß die Zahl 115 eine Sedezimalzahl ist, dann könnten wir sie auf folgende Weise den einzelnen Stellen zuordnen (wie der entsprechende Dezimalwert errechnet wurde, braucht uns an dieser Stelle noch nicht zu interessieren):

3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
1	1	5

Dezimalwert = 277

3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
0	1	15

Dezimalwert = 31

3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
0	11	5

Dezimalwert = 181

Daraus erkennen wir, wie unterschiedlich die Ziffern einer Sedezimalzahl unter diesen Umständen den einzelnen Stellenwerten zugeordnet werden kann. Um diese Mißverständnisse gar nicht erst aufkommen zu lassen, hat man sich dazu entschlossen, zwischen die einzelnen Stellenwerte Punkte zu setzen.

Für unser letztes Zahlenbeispiel bedeutet das folgendes:

Sedezimalzahl	Dezimalzahl
1. 1. 5	277
1.15	31
11. 5	181

Es gibt jedoch noch eine weitere Schreibweise, Sedezimalzahlen unmißverständlich darzustellen, mit der wir sogar ohne Punkte auskommen.

Man hat sich nämlich darauf geeinigt, statt der sedezimalen Werte 10 bis 15 die ersten sechs Buchstaben unseres Alphabets einzusetzen. Eine Gegenüberstellung der beiden Schreibweisen soll uns das veranschaulichen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Wenn wir also die beiden Schreibweisen für unser Zahlenbeispiel anwenden, sieht die Gegenüberstellung wie folgt aus:

numerische Schreibweise	alphanumerische Schreibweise
1. 1. 5	115
1.15	1F
11. 5	B5

3.2. Stellen wir nun einmal die Ziffern des Sedezimalsystems den Zahlen des Dualsystems gegenüber:

sedezimal	dual
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A (=10)	1010
B (=11)	1011
C (=12)	1100
D (=13)	1101
E (=14)	1110
F (=15)	1111

Eins wird hier besonders deutlich: Um den größten Wert einer Stelle des Sedezimalsystems (= F bzw. 15) darstellen zu können, benötigen wir maximal vier Stellen des Dualsystems, denn sedezimal F bzw. 15 entspricht dual 1111. Die nächstgrößere Dualzahl wäre fünfstellig und lautet 10000. Das entspricht dezimal 16. Und dezimal 16 wird auch schon sedezimal zweistellig geschrieben, nämlich 10.

Es wird uns also ein leichtes sein, Sedezimalzahlen in Dualzahlen umzuwandeln. Dazu ein Beispiel:

Wir wollen die Sedezimalzahl A 9 F (bzw. 10.9.15) in eine Dualzahl umwandeln:

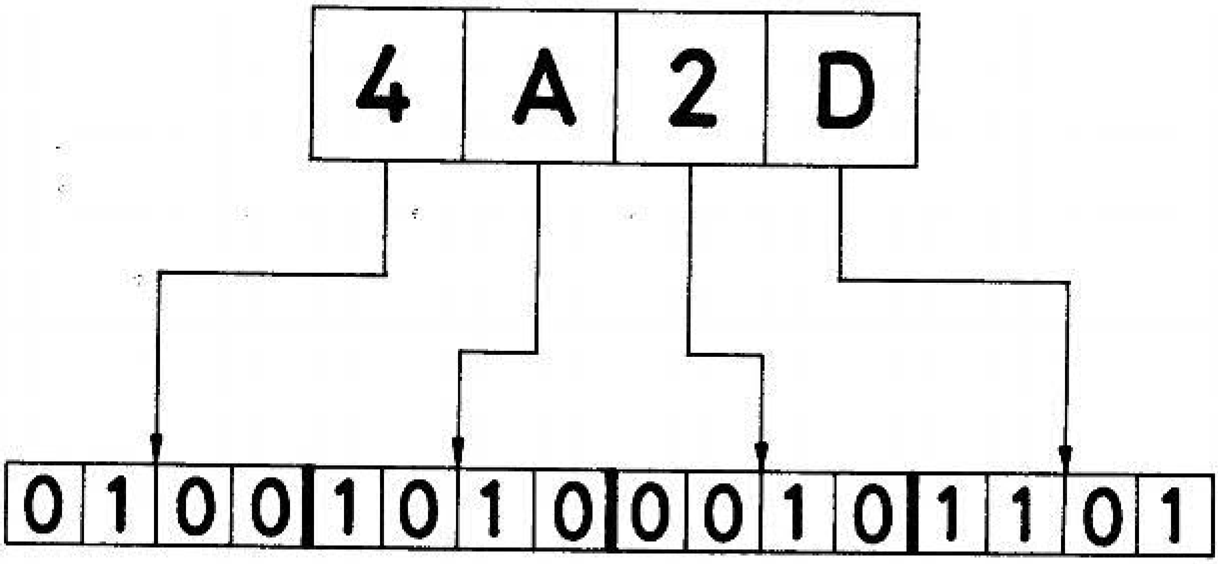
D.h. jede Stelle der Sedezimalzahl müssen wir gesondert in Dualzahlen darstellen:

A = 1010
9 = 1001
F = 1111

Schreiben wir nun noch die drei Dualzahlen hintereinander, so haben wir die Umwandlung abgeschlossen, d.h. sedezimal A 9 F entspricht dual 1010 1001 1111.

Noch übersichtlicher wird uns die Umwandlung von Sedezimalzahlen in Dualzahlen am folgenden Beispiel. Wenn wir schließlich einmal so weit sind, daß wir die Dualzahlen von 0 - 15 im Kopf haben, brauchen wir nicht einmal zu rechnen. Vorerst nehmen wir aber noch die Tabelle der Seite 45 zu Hilfe:

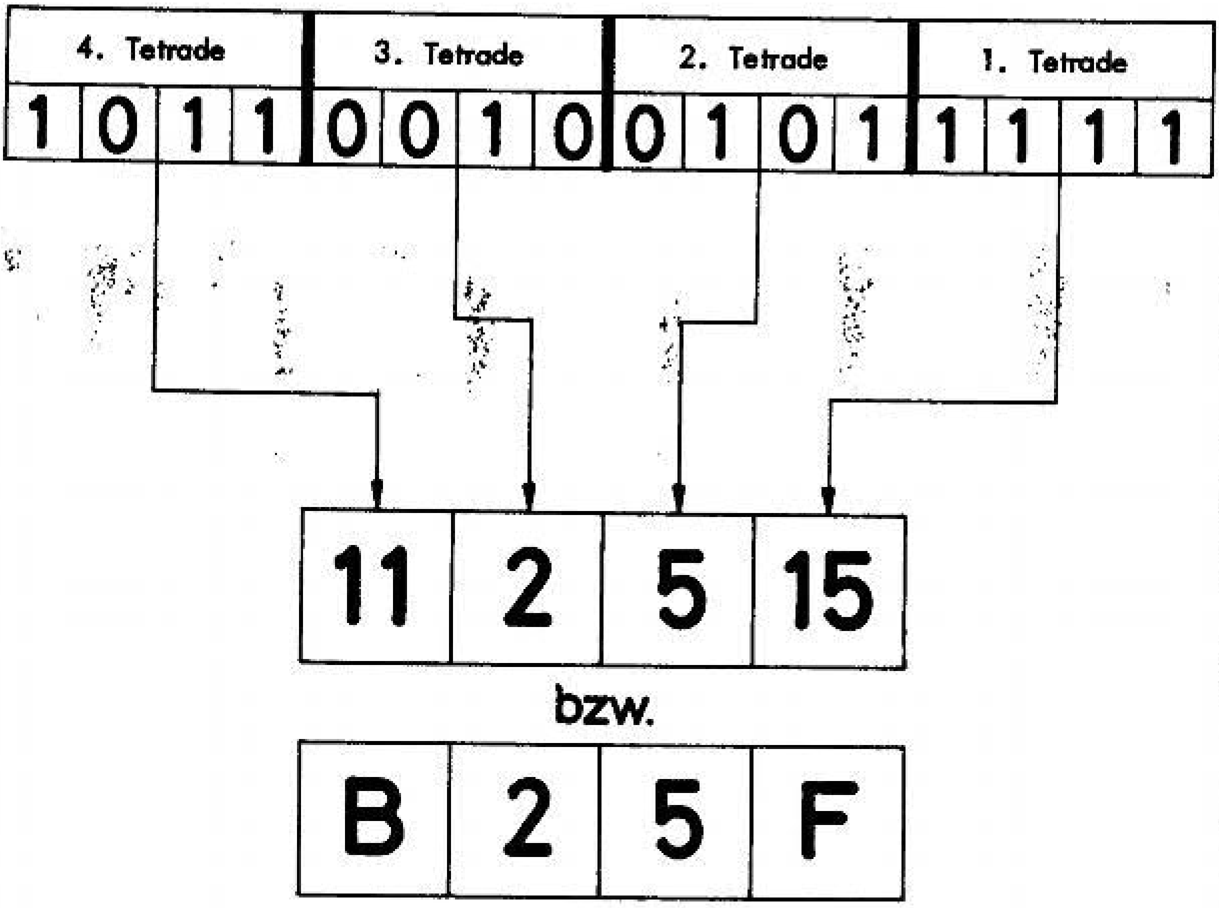
Die Sedezimalzahl 4 A 2 D (bzw. 4.10.2.13) soll in eine Dualzahl umgewandelt werden:



Gönnen wir uns den Spaß, diese Art der Umwandlung von Sedezimalzahlen in Dualzahlen im Arbeitsbogen Nr. 18 nachzuvollziehen.

3.3. Ebenso wie wir Sedezimalzahlen in Dualzahlen umgewandelt haben, können wir die Umwandlung auch umgekehrt durchführen, indem wir von der 1. Stelle ausgehend jeweils vier Dualziffern zu einer "Tetrade" zusammenfassen und diese jeweils als Sedezimalziffer ausdrücken:

Die Dualzahl 1011 0010 0101 1111 soll in eine Sedezimalzahl umgewandelt werden:



In gleicher Weise lösen wir die Umwandlungsaufgaben im Arbeitsbogen Nr. 19.

3.4. Erinnern wir uns an folgende Regel: "Die Stellenwerte einer Zahl sind Potenzen der Basis des jeweiligen Zahlensystems!" - Das bedeutet doch für das Sedezimalsystem, daß die Stellenwerte einer Sedezimalzahl Potenzen der Basis "16" sind, wie es in der folgenden Tabelle deutlich zu sehen ist:

3. Tetrade				2. Tetrade				1. Tetrade				Tetraden
16^2				16^1				16^0				Stellenwerte als Potenzen von 16
256				16				1				Werte der Sechzehner-Potenzen
2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	Potenzen von Zwei je Tetrade
8	4	2	1	8	4	2	1	8	4	2	1	Werte der Zweier-Potenzen je Tetrade

Wenn wir z.B. die Sedezimalzahl A 3 E bzw. 10.3.14 in eine Dezimalzahl umwandeln, müssen wir wie folgt vorgehen:

Die 1. Stelle (= 14) ist mit 16^0 = 1 zu multiplizieren: 14 x 1 = 14

Die 2. Stelle (= 3) ist mit 16^1 = 16 zu multiplizieren: 3 x 16 = 48

Die 3. Stelle (= 10) ist mit 16^2 = 256 zu multiplizieren: 10 x 256 = + 2560

Nun addieren wir noch die Dezimalwerte und erhalten.............. 2622

Die Umwandlung ist damit abgeschlossen. Weitere Umwandlungen von Sedezimalzahlen in Dezimalzahlen sind nach diesem Schema im Arbeitsbogen Nr. 20 durchzuführen.

3.5. In Anlehnung an ein Verfahren der Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen wollen wir eine Methode kennenlernen, Dezimalzahlen in Sedezimalzahlen umzuwandeln. – Erinnern wir uns: Bei der Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen haben wir u.a. fortgesetzt durch die Basis "2" dividiert. Die Reste entsprachen von unten nach oben gelesen der gesuchten Dualzahl.

Vom Prinzip her verfahren wir bei der Umwandlung von Dezimalzahlen in Sedezimalzahlen genauso. Wir dividieren lediglich hier durch eine andere Bais, nämlich "16". Dazu ein Beispiel:

Die Dezimalzahl 57384 soll in eine Sedezimalzahl umgewandelt werden (die Divisionen sind solange durchzuführen, bis als Quotient "0 Rest x" entsteht):

```
57384 : 16 = 3586 Rest    8
48
 93
 80
 138
 128
  104
   96
    8

3586 : 16 =  224 Rest     2
32
 38
 32
  66
  64
   2

224 : 16 =    14 Rest     0
16
 64
 64
  0

14 : 16 =      0 Rest    14
 0
14
```

Die Sedezimalzahl lautet somit:

14.0.2.8 bzw.
E 0 2 8

Nach dieser Methode wollen wir weitere Umwandlungsaufgaben im Arbeitsbogen Nr. 21 üben.

3.6. Eine weitere Methode, Dezimalzahlen in Sedezimalzahlen umzuwandeln, besteht darin, die Dezimalzahl fortgesetzt durch alle Potenzen von 16 zu dividieren, angefangen mit der größten Sechzehner-Potenz, die in der Dezimalzahl enthalten ist. Die Divisionen werden durchgeführt bis zum Divisor $16^0 = 1$. Die Teilergebnisse (ohne Reste) ergeben von oben nach unten gelesen die Sedezimalzahl.

Die Dezimalzahl 3807 soll in eine Sedezimalzahl umgewandelt werden:

$$
\begin{array}{l}
3807 : 256 = \boxed{14} \quad \text{Rest } 223 \\
\underline{256} \\
1247 \\
\underline{1024} \\
223
\end{array}
\qquad \text{Probe:} \quad 14 \times 256 = 3584
$$

$$
\begin{array}{l}
223 : 16 = \boxed{13} \quad \text{Rest } 15 \\
\underline{16} \\
63 \\
\underline{48} \\
15
\end{array}
\qquad 13 \times 16 = 208
$$

$$
15 : 1 = \boxed{15} \quad \text{Rest } 0 \qquad 15 \times 1 = + \underline{\ 15\ }
$$

$$
3807
$$

Das Ergebnis lautet also: **14.13.15**

bzw. E D F

Nach dieser Methode sind einige weitere Umwandlungen durchzuführen. Wir verwenden dazu den Arbeitsbogen Nr. 22.

3.7. Beim Addieren von Sedezimalzahlen sind prinzipiell die gleichen Regeln zu beachten wie beim Addieren von Dezimalzahlen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß nicht beim Überschreiten von "9" ein Übertrag stattfindet, sondern erst bei F (= 15).

Dazu einige Beispiele:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 2 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 3 \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ +\ 2 \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ +\ 6 \\ \hline F \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ +\ 7 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \\ +\ 7 \\ \hline 11 \end{array}$$

Lösen wir nun entsprechende kleine Aufgaben im Arbeitsbogen Nr. 23.

Sehen wir uns nun einmal an, wie eine Addition mehrstelliger Sedezimalzahlen durchgeführt wird (für die Überträge in den einzelnen Stellen ist wieder eine gesonderte Zeile vorgesehen):

	2	B	F	9	1. Summand
+	4	0	0	7	2. Summand
			1		Übertrag
				0	

9 + 7 = 10: d.h. "0" wird in die 1. Stelle geschrieben, und die "1" ist der Übertrag zur 2. Stelle.

	2	B	F	9	1. Summand
+	4	0	0	7	2. Summand
		1	1		Übertrag
			0	0	

F + 0 = F. Dazu kommt der Übertrag also F + 1 = 10: d.h. "0" wird in in die 2. Stelle geschrieben, und die "1" ist der Übertrag zur 3. Stelle.

	2	B	F	9	1. Summand
+	4	0	0	7	2. Summand
		1	1		Übertrag
		C	0	0	

B + 0 = B. Dazu kommt der Übertrag also B + 1 = C. In die 3. Stelle wird also "C" geschrieben. Ein Übertrag ist hier nicht entstanden.

	2	B	F	9	1. Summand
+	4	0	0	7	2. Summand
		1	1		Übertrag
	6	C	0	0	Summe

2 + 4 = 6: D.h. "6" wird in die 4. Stelle geschrieben. Ein Übertrag ist hier nicht entstanden.

Weitere Additionsaufgaben mit Sedezimalzahlen finden wir im Arbeitsbogen Nr. 24.

3.8. Nachdem wir nun das Addieren mit Sedezimalzahlen beherrschen, wollen wir uns jetzt dem Subtrahieren zuwenden. Die Besonderheit beim Subtrahieren mit Sedezimalzahlen besteht darin, daß eine "geborgte" 1 dem Dezimalwert "16" in der jeweiligen Stelle entspricht. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{array}{rccccl} & \boxed{\begin{matrix}1\\ \cancel{2}\end{matrix}} & 0 & 0 & \boxed{0} & \text{Minuend} \\ - & & 8 & D & \boxed{7} & \text{Subtrahend} \\ \hline \end{array}$$

Zunächst rechnen wir 0 - 7, d.h. wir müssen uns von der links benachbarten Stelle "einen" borgen. Da jedoch die links benachbarte Stelle (2. Stelle) "0" ist, müssen wir noch weiter nach links. Die 3. Stelle ist jedoch ebenfalls "0". Also "borgen" wir uns eine "1" von der 4. Stelle. Der neue Wert der 4. Stelle ist somit um "1" kleiner, also 2 - 1 = 1. Die "2" wird demnach durchgestrichen, und darüber schreiben wir den neuen Wert dieser 4. Stelle, also "1".

$$\begin{array}{rccccl} & 1 & \boxed{10} & & & \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 & \text{Minuend} \\ - & & 8 & D & 7 & \text{Subtrahend} \\ \hline \end{array}$$

Die geliehene "1" der 4. Stelle übertragen wir nun zunächst in die 3. Stelle. Sie stellt dort den Wert 10 dar. Der Minuend der 3. Stelle hat sich also um 10 erhöht.

$$\begin{array}{rccccl} & & \boxed{F} & & & \\ & 1 & \boxed{\cancel{10}} & \boxed{10} & & \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 & \text{Minuend} \\ - & & 8 & D & 7 & \text{Subtrahend} \\ \hline \end{array}$$

Weiterhin müssen wir jetzt von der 3. Stelle eine "1" für die 2. Stelle "borgen". Der neue Wert der 3. Stelle wird somit um "1" kleiner, also 10 - 1 = F. Der Wert "10" in der 3. Stelle wird somit gestrichen, und darüber schreiben wir den neuen Wert der 3. Stelle, also "F". Die geliehene "1" der 3. Stelle übertragen wir nun in die 2. Stelle. Sie stellt dort den Wert 10 dar. Der Minuend der 2. Stelle hat sich somit um 10 erhöht.

$$\begin{array}{rcccc} & & F & F & \\ & 1 & \cancel{10} & \cancel{10} & 10 \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & D & 7 \\ \hline & & & & \boxed{9} \end{array}$$

Minuend
Subtrahend

Jetzt können wir uns eine "1" von der 2. Stelle borgen. Der neue Wert der 2. Stelle wird somit um "1" kleiner: 10 - 1 = F. Der Wert "10" der 2. Stelle wird gestrichen und der neue Wert darüber geschrieben, also "F". Die geliehene "1" der 2. Stelle übertragen wir in die 1. Stelle und stellt dort eine "10" dar. Der Minuend der 1. Stelle ist damit um 10 erhöht, also 10 + 0 = 10. Endlich können wir also rechnen: 10 - 7 = 9.

$$\begin{array}{rcccc} & & F & F & \\ & 1 & \cancel{10} & \cancel{10} & 10 \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & D & 7 \\ \hline & & & \boxed{2} & 9 \end{array}$$

Minuend
Subtrahend

In der 2. Stelle rechnen wir:
F - D = 2

$$\begin{array}{rcccc} & & F & F & \\ & 1 & \cancel{10} & \cancel{10} & 10 \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & D & 7 \\ \hline & & \boxed{7} & 2 & 9 \end{array}$$

Minuend
Subtrahend

In der 3. Stelle rechnen wir:
F - 8 = 7

$$\begin{array}{rcccc} & & F & F & \\ & 1 & \cancel{10} & \cancel{10} & 10 \\ & \cancel{2} & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & D & 7 \\ \hline & \boxed{1} & 7 & 2 & 9 \\ \hline\hline \end{array}$$

Minuend
Subtrahend

In der 4. Stelle rechnen wir:
1 - 0 = 1

.... Das Ergebnis steht somit fest.

Nach diesem Verfahren sind weitere Übungsaufgaben im Arbeitsbogen Nr. 25 zu lösen.

3.9. Jetzt fehlt uns nur noch die Subtraktion mit Hilfe der Komplement-Addition. Die Besonderheit für das Sedezimalsystem besteht lediglich darin, daß wir hier zur Basis "16" ergänzen, wenn wir das B-Komplement bilden wollen. Entsprechend erhalten wir unser (B-1)-Komplement, wenn wir zu "15" ergänzen. Somit stehen sich im Sedezimalsystem folgende Ziffern komplementär gegenüber. Die Tabelle gilt für das (B-1)-Komplement:

0		und	15	(bzw. F)
1		und	14	(bzw. E)
2		und	13	(bzw. D)
3		und	12	(bzw. C)
4		und	11	(bzw. B)
5		und	10	(bzw. A)
6		und	9	
7		und	8	
8		und	7	
9		und	6	
10	(bzw. A)	und	5	
11	(bzw. B)	und	4	
12	(bzw. C)	und	3	
13	(bzw. D)	und	2	
14	(bzw. E)	und	1	
15	(bzw. F)	und	0	

Dazu einige Beispiele:

A D 3	Zahl	E F 0	Zahl
5 2 C	(B-1)-Komplement	1 0 F	(B-1)-Komplement
D B 6	Zahl	B A 2	Zahl
2 4 9	(B-1)-Komplement	4 5 D	(B-1)-Komplement

Im Arbeitsbogen Nr. 26 können wir weitere Komplemente bilden.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal das Prinzip der Komplement-Addition, indem wir gleich statt Dualzahlen Sedezimalzahlen einsetzen. Zunächst ein Beispiel, in dem der Minuend größer ist als der Subtrahend:
(Wir verwenden das (B-1)-Komplement.)

CBD	Minuend
- 6FE	Subtrahend (nötigenfalls mit Nullen auf Länge des Minuenden bringen)
901	(B-1)-Komplement des Subtrahenden bilden
+ CBD	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
~~1~~5BE	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
+ 1	In der vordersten Stelle ist ein Übertrag aufgetreten, der zu streichen ist. Eine "1" ist hinzuzuaddieren.
5BF	Die Summe daraus ist die Differenz der Subtraktion C B D - 6 F E. Der Minuend ist größer als der Subtrahend. Folgedessen ist das Ergebnis positiv.

Im nächsten Beispiel ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Im übrigen verwenden wir auch wieder das (B-1)-Komplement:

ECA	Minuend
- FDB	Subtrahend
024	(B-1)-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ ECA	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
EEE	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
- 111	In der vordersten Stelle (hier 3. Stelle) ist kein Übertrag entstanden. Deshalb wird von der letzten Summe (hier E E E) noch einmal das (B-1)-Komplement gebildet (es wird rekomplementiert). Der so entstandene Wert bekommt noch ein negatives Vorzeichen und stellt somit die Differenz aus der Subtraktion E C A - F D B dar.

Ähnliche Subtraktionsaufgaben mit Sedezimalzahlen sind im Arbeitsbogen Nr. 27 zu lösen.

4. Über das Sedezimalsystem hinaus wird in Datenverarbeitungsanlagen auch das sog. "Oktalsystem" verwendet. Dieses Zahlensystem hat die Basis "8" und stellt ebenfalls eine verkürzte Schreibweise des Dualsystems dar.

Im Wissen um die Basis dieses Zahlensystems können wir schon einiges aussagen, nämlich...

- Das Oktalsystem besteht aus acht verschiedenen Ziffern (denn "8" = Anzahl der Ziffern).
- Die größte Ziffer des Oktalsystems ist "8-1" = 8 - 1 = 7.
- Als Stellenwerte des Oktalsystems gelten die Potenzen von "8".

Anders als im Sedezimalsystem können wir hier zwecks Stellenzuordnung auf die Punkte zwischen den Stellen einer Zahl verzichten.

Im einzelnen sind den Stellen folgende Potenzen zugeordnet:

5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
Potenzwert 8^4	Potenzwert 8^3	Potenzwert 8^2	Potenzwert 8^1	Potenzwert 8^0
Dezimalwert 4096	Dezimalwert 512	Dezimalwert 64	Dezimalwert 8	Dezimalwert 1

4.1. Unter Verwendung der letzten Tabelle sind wir schon in der Lage, Oktalzahlen in Dezimalzahlen umzuwandeln. Dazu ein Beispiel:

Die Oktalzahl 256 ist in eine Dezimalzahl umzuwandeln:

3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
2	5	6
$= 2 \times 8^2$	$= 5 \times 8^1$	$= 6 \times 8^0$
$= 2 \times 64$	$= 5 \times 8$	$= 6 \times 1$
= 128	= 40	= 6

$$
\begin{array}{lr}
 & 6 \\
 & 40 \\
 & 128 \\
\hline
\text{dezimal} & 174 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Wir üben die Umwandlung von Oktalzahlen in Dezimalzahlen, indem wir die Aufgaben des Arbeitsbogens Nr. 28 lösen.

4.2. Umgekehrt wandeln wir Dezimalzahlen in Oktalzahlen um, indem wir die Dezimalzahl genauso wie beim Dual- und Sedezimalsystem fortgesetzt durch die Basis dividieren, d.h. wir dividieren in diesem Fall immer durch "8". Die Reste ergeben von unten nach oben gelesen die gesuchte Oktalzahl. Wir dividieren solange, bis der Quotient "0 Rest x" entsteht.

Dazu ein Beispiel: Die Dezimalzahl 458 soll in eine Oktalzahl umgewandelt werden:

```
458 : 8 = 57   Rest  2
40
 58
 56
  2

 57 : 8 =  7   Rest  1
 56
  1

  7 : 8 =  0   Rest  7
```

Die gesuchte Oktalzahl heißt:

712

Im Arbeitsbogen Nr. 29 sind weitere Dezimalzahlen nach dieser Methode umzuwandeln.

4.3. In der Gegenüberstellung von Oktalzahlen und Dualzahlen wollen wir die Beziehungen zwischen diesen beiden Zahlensystemen kennenlernen.

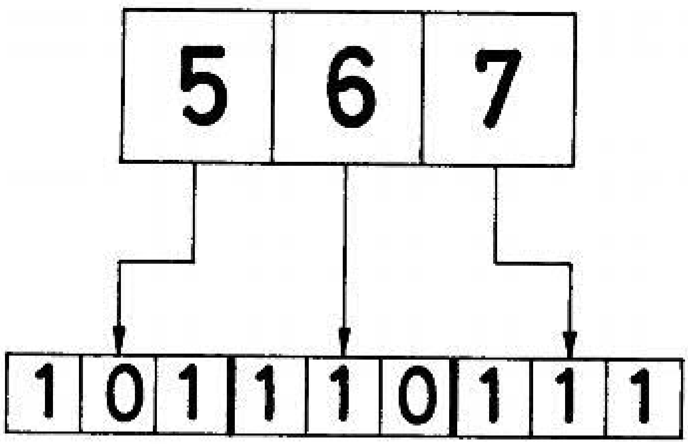
oktal	dual
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111
10	1000

Ähnlich wie beim Sedezimalsystem erkennen wir, daß hier max. 3 Stellen des Dualsystems erforderlich sind, um den größten Wert einer Stelle des Oktalsystems darzustellen (nämlich dual 111 = oktal 7.

Wenn wir also jeder Stelle einer Oktalzahl die entsprechende dreistellige Dualzahl zuordnen, müßte es nicht mehr schwer sein, Oktalzahlen in Dualzahlen umzuwandeln. Wir brauchen nur noch die Dualzahlen hintereinanderzureihen.

Dazu ein Beispiel:

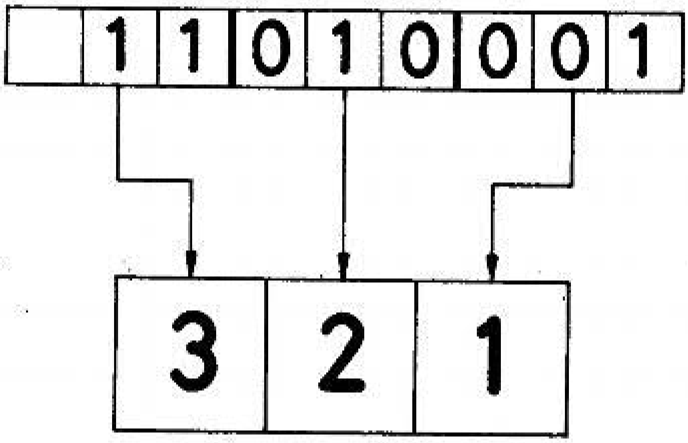
Die Oktalzahl 567 soll in eine Dualzahl umgewandelt werden



Nach diesem Prinzip wollen wir weitere Umwandlungen im Arbeitsbogen Nr. 30 durchführen.

4.4. Wenn wir eine Dualzahl in eine Oktalzahl umzuwandeln haben, müssen wir genau umgekehrt vorgehen. Es werden von der 1. Stelle beginnend jeweils 3 Dualziffern zusammengefaßt und als Oktalziffer ausgedrückt. Dazu ein Beispiel:

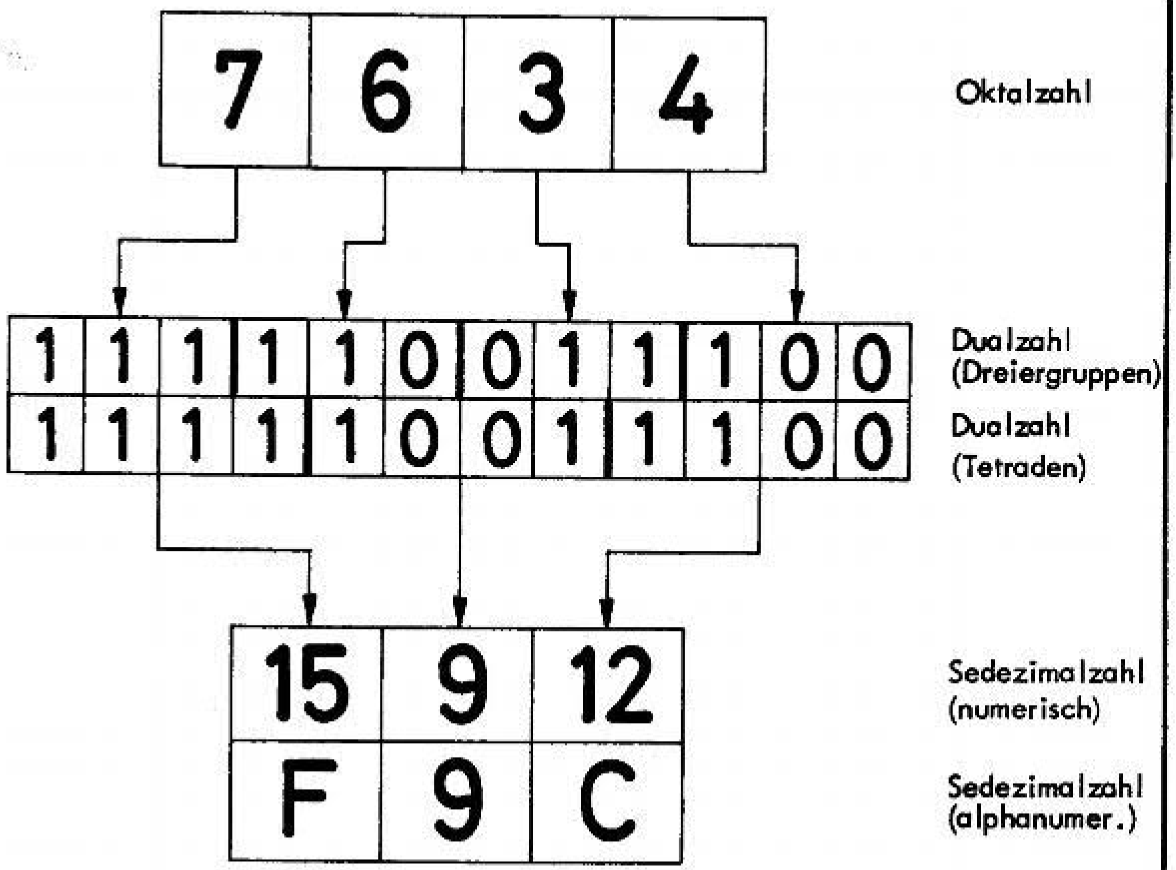
Die Dualzahl 11 010 001 soll in eine Oktalzahl umgewandelt werden:



Die Übungsaufgaben dazu finden wir im Arbeitsbogen Nr. 31.

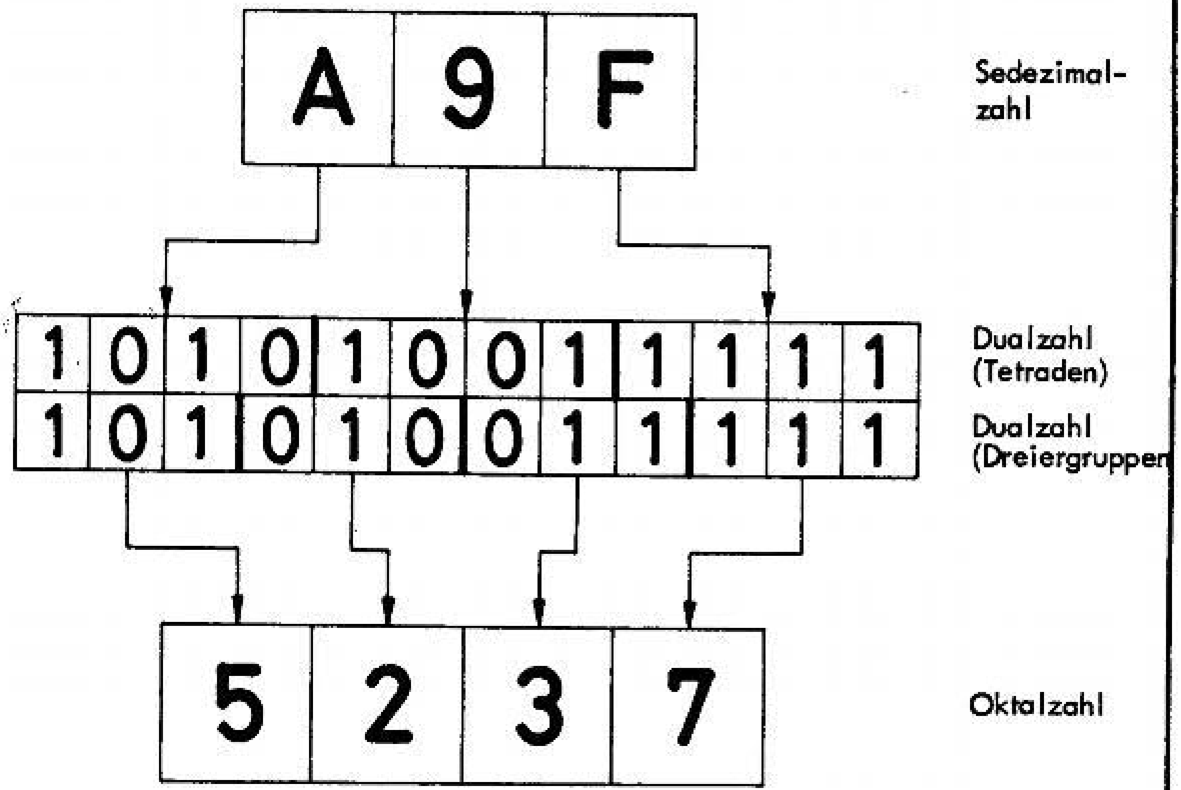
4.5. Uns ist inzwischen bekannt, daß es mehrere Möglichkeiten der Zahlenumwandlung gibt. Bei der Umwandlung von Oktalzahlen in Sedezimalzahlen wollen wir uns jedoch auf eine Methode beschränken. Im ersten Moment scheint sie zwar umständlich. Es ist jedoch, wie wir gleich feststellen werden, eine sehr einfache Methode. Und zwar wandeln wir um, indem wir den Umweg über das Dualsystem nehmen. Jede Stelle der Oktalzahl drücken wir also zunächst als dreistellige Dualzahl aus. Und anschließend gruppieren wir die Dualzahlen neu, indem wir in der 1. Stelle beginnend jeweils 4 Dualziffern zu einer Tetrade zusammenfassen. Diese einzelnen Tetraden drücken wir nun als Sedezimalziffern aus.

Im Beispiel wandeln wir die Oktalzahl 7634 in eine Sedezimalzahl um:



Arbeitsbogen Nr. 32 beinhaltet weitere Umwandlungsaufgaben.

4.6. Um eine Sedezimalzahl in eine Oktalzahl umzuwandeln, brauchen wir lediglich umgekehrt zu verfahren: Zunächst bilden wir von jeder Sedezimalziffer duale Tetraden, teilen diese Dualziffern dann in Dreiergruppen auf und wandeln jede Gruppe dann in eine Oktalziffer um. Dazu ein Beispiel mit der Sedezimalzahl A 9 F .



Wir üben das Umwandeln an einigen Beispielen im Arbeitsbogen Nr. 33.

4.7. Für das Addieren im Oktalsystem treffen im Prinzip die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die der anderen Stellenwertsysteme zu, so daß wir uns gleich einige Beispiele ansehen wollen. Die Besonderheit besteht darin, daß beim Überschreiten von "7" ein Übertrag in die nächste Stelle erfolgt.

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 3 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +\ 1 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 5 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 2 \\ \hline 11 \end{array}$$

Damit wir uns daran gewöhnen, wollen wir zunächst einige kleine Aufgaben lösen, die wir im Arbeitsbogen Nr. 34 finden.

Das Rechnen mit mehrstelligen Oktalzahlen soll uns an folgendem Beispiel verdeutlicht werden: 367 + 421

$$\begin{array}{rl} 3\,6\,\boxed{7} & \text{1. Summand} \\ +\,4\,2\,\boxed{1} & \text{2. Summand} \\ \boxed{1} & \text{Übertrag} \\ \hline \boxed{0} & \end{array}$$

7 + 1 = 10, d.h. "0" wird in die 1. Stelle geschrieben, und die "1" ist der Übertrag zur 2. Stelle.

$$\begin{array}{rl} 3\,\boxed{6}\,7 & \text{1. Summand} \\ +\,4\,\boxed{2}\,1 & \text{2. Summand} \\ \boxed{1}\,\boxed{1} & \text{Übertrag} \\ \hline \boxed{1}\,0 & \end{array}$$

6 + 2 = 10. Dazu kommt der Übertrag. Also 10 + 1 = 11. D.h. eine "1" wird unter den Summenstrich in die 2. Stelle geschrieben, und die andere "1" ist der Übertrag zur 3. Stelle.

$$\begin{array}{rl} \boxed{3}\,6\,7 & \text{1. Summand} \\ +\,\boxed{4}\,2\,1 & \text{2. Summand} \\ \boxed{1}\,\boxed{1}\,1 & \text{Übertrag} \\ \hline \boxed{0}\,1\,0 & \end{array}$$

3 + 4 = 7. Dazu kommt der Übertrag. Also 7 + 1 = 10. D.h. die "0" wird unter den Summenstrich in die 3. Stelle geschrieben, und die "1" ist der Übertrag zur 4. Stelle

$$\begin{array}{rl} 3\,6\,7 & \text{1. Summand} \\ +\,4\,2\,1 & \text{2. Summand} \\ \boxed{1}\,1\,1 & \text{Übertrag} \\ \hline \boxed{1}\,0\,1\,0 & \text{Summe} \end{array}$$

In der 4. Stelle ist als Teilsummand der Übertrag "1" aufgetreten. Die "1" schreiben wir nun noch unter den Summenstrich in die 4. Stelle. Die Addition ist damit abgeschlossen.

Weitere Additionen mit Oktalzahlen können wir im Arbeitsbogen Nr. 35 durchführen.

4.8. Wenden wir uns nun noch der Subtraktion im Oktalsystem zu. Da wir es hier, anders als im Sedezimalsystem, nicht mit Buchstaben zu tun haben, wird uns die Methode des "Borgens" auch leichter fallen. Es gilt dabei zu beachten, daß eine "geborgte " 1 hier dem Basiswert "8" entspricht. Dazu ein Beispiel: 643 - 264:

$$\begin{array}{rrrrl} & & 3 & 10 & \\ & 6 & \cancel{4} & 3 & \text{Minuend} \\ - & 2 & 6 & 4 & \text{Subtrahend} \\ \hline & & & \boxed{7} & \end{array}$$

3 - 4 (nicht ausführbar). Eine "1" wird von der 2. Stelle "geborgt". Somit wird die "4" der 2. Stelle durchgestrichen (4 - 1 = 3) und darüber der neue Wert dieser Stelle (= 3) geschrieben. In der 1. Stelle ist dadurch der Minuend um 10 (= dez. 8) größer geworden. D.h. wir können jetzt rechnen:

10	+	3	-	4	= 7
(geborgt)		(Minuend)		(Subtrahend)	

$$\begin{array}{rrrrl} & & 10 & & \\ & 5 & 3 & 10 & \\ & \cancel{6} & \cancel{4} & 3 & \text{Minuend} \\ - & 2 & 6 & 4 & \text{Subtrahend} \\ \hline & & \boxed{5} & 7 & \end{array}$$

3 - 6 (nicht ausführbar). Eine "1" wird von der 3. Stelle "geborgt". Somit wird die "6" der 3. Stelle durchgestrichen, und der neue Wert dieser Stelle (= 5) wird darüber geschrieben. In der 2. Stelle ist dadurch der Minuend um 10 größer geworden. D.h. wir können jetzt rechnen:

10	+	3	-	6	= 5
(geborgt)		(Minuend)		(Subtrahend)	

$$\begin{array}{rrrrl} & & 10 & & \\ & \boxed{5} & 3 & 10 & \\ & \cancel{6} & \cancel{4} & 3 & \text{Minuend} \\ - & \boxed{2} & 6 & 4 & \text{Subtrahend} \\ \hline & \boxed{3} & 5 & 7 & \text{Differenz} \end{array}$$

5 - 2 = 3. Die Subtraktion ist damit abgeschlossen.

Die Subtraktion im Oktalsystem können wir unter Anwendung der Methode des "Borgens" im Arbeitsbogen Nr. 36 üben.

Natürlich können wir auch Subtraktionen im Oktalsystem durchführen, indem wir die Komplement-Addition anwenden. In unserem Beispiel nehmen wir dazu das (B-1)-Komplement:

764	Minuend
- 357	Subtrahend (nötigenfalls mit Nullen auf Länge des Minuenden bringen)
420	(B-1)-Komplement des Subtrahenden bilden
+ 764	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B-1)-Komplement des Subtrahenden addieren
$\cancel{1}404$	Summe aus: (B-1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
+ 1	In der vordersten Stelle ist ein Übertrag aufgetreten, der zu streichen ist. Eine "1" ist hinzuzuaddieren.
405	Die Summe daraus ist die Differenz der Subtraktion 764 - 357 . Der Minuend ist größer als der Subtrahend. Folgedessen ist das Ergebnis positiv.

Nun noch ein Beispiel mit einem Minuenden, der kleiner ist als der Subtrahend.

623	Minuend
− 777	Subtrahend
000	(B−1)-Komplement vom Subtrahenden bilden
+ 623	Minuend noch einmal hinschreiben und zum (B−1)-Komplement des Subtrahenden addieren
623	Summe aus: (B−1)-Komplement vom Subtrahend + Minuend
− 154	In der vordersten Stelle (hier 3. Stelle) ist kein Übertrag entstanden. Deshalb wird von der letzten Summe (hier 623) noch einmal das (B−1)-Komplement gebildet (es wird rekomplementiert). Der so entstandene Wert bekommt noch ein negatives Vorzeichen und stellt somit die Differenz aus der Subtraktion 623 − 777 dar.

Einige Übungsaufgaben sind dazu im Arbeitsbogen Nr. 37 zusammengestellt.